Correction Examen Maths : Bac PC – SVT / Juin 2022

Exercice 1:

1) $on\ a :\ A(0,1,1)\,;B(1,2,0)\ et\ C(-1,1,2)$

$a)$ *Montrer que :* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

$On\ a :\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)\ et\ \overrightarrow{AC}(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1-0,2-1,0-1)\ \ et\ \ \overrightarrow{AC}(-1-0,1-1,2-1)$

$\overrightarrow{AB}(1,1,-1)\ \ et\ \overrightarrow{AC}(-1\,,0\,,1)$

$$Alors\ \ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(1-0)\vec{i}-(1-1)\vec{j}+(0+1)\vec{k}$$

$$=\vec{i}-0\times\vec{j}+\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{k}$$

$b)$ *Déduire que* $x+z-1=0$ *est une équation cartérsienne du Plan* (ABC)

On sait que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$ *(question* 1)a))

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ (1,0,1)$ *est un vecteur normal au plan*(ABC).

$d'ou\ \ (ABC):x+z+d=0\,(\ d\in\mathbb{R})$

$Or\ \ A(0,1,1)\in(ABC)$

$donc\ \ 0+1+d=0\ \Rightarrow d=-1$

Par consequent $x+z-1=0$ *cartérsienne du Plan* (ABC)

2) *Déterminer l'equation de la sphère*(S) *de centre* $\Omega(1,1,2)$ *et de rayon* $R=\sqrt{2}$

Soit $M(x,y,z)\in(S)$,

on a: $\Omega M=R$ *(Rayon de sphère)*

$\Leftrightarrow\quad(\Omega M)^2=R^2$

$\Leftrightarrow(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2$

3) *Pour montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A;*

il faut montrer que $d(\Omega,(ABC)) = R$ *et que* $A \in (S)$ *et* $A \in (ABC)$.

on a: $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|x_\Omega + z_\Omega - 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Or $R = \sqrt{2}$ *donc* $d(\Omega,(ABC)) = R$ *,ainsi* (ABC) *est tangent à la sphère* (S). (a)

On a : $\Omega A = \sqrt{(x_A-1)^2+(y_A-1)^2+(z_A-2)^2}$

$= \sqrt{(0-1)^2+(1-1)^2+(1-2)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = R$

Donc $A \in (S)$. (b)

Or on sait que $A \in (ABC)$ (c)

Alors de (a) , (b) *et* (c) *, on conclu que* (ABC) *est tangent à la sphère* (S) *en* A.

4) *La droite* (Δ) *passe par* C *et* $\perp$ *au Plan* (ABC)

$a)$ *La représentation paramétrique de la droite* (Δ).

On a : $\vec{n}(1,0,1)$ *vecteur normal au plan* (ABC)

Or puisque $(\Delta) \perp (ABC)$ *alors* $\vec{n}(1,0,1)$ *est un vecteur directreur de la droite* (Δ) *et comme* $C(-1,1,2) \in (\Delta)$

Par consequent une représentation paramétrique de la droite (Δ) *est* :

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \\ z = 2+t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

$b)$ *Résoudre le systeme suivant* :

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \\ z = 2+t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (-1+t-1)^2+(1-1)^2+(2+t-2)^2 = 2$$

PROF SAÏD

$\Leftrightarrow (t-2)^2+0^2+(t)^2=2$

$\Leftrightarrow t^2-4t+4+\ t^2=2$

$\Leftrightarrow 2t^2-4t+2=0$

$\Leftrightarrow 2(t^2-2t+1)=0$

$\Leftrightarrow 2(t-1)^2=0$

$\Leftrightarrow t-1=0 \ \Leftrightarrow\ t=1$

Alors (Δ) *coupe* (S) *en un point (car il y a une seule solution)*

d'ou (Δ) *est la tangente á* (S) *en* $\begin{cases} x_D=-1+1=0 \\ y_D=1 \\ z_D=2+1=3 \end{cases}$

Donc les coordonnées du point $D(0,1,3)$

c) *Produit scalaire* $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$:

On a : $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ *et* $\left(\vec{i}+\vec{k}\right)(1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=-1\times1+0\times0+1\times1$

$=-1+1=0$

On deduit la distance $d(A,(\Delta))$:

On sait que $\vec{n}=\vec{i}+\vec{k}$ *vecteur directeur de la droite*(Δ)

et $C\in(\Delta)$ *, puisque* $\overrightarrow{AC}.\vec{U}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\vec{U}$

$\Rightarrow (AC)\perp(\Delta)$

Ceci dit que le point C *est la projeté orthogonal de* A *sur* (Δ)

Donc $d(A,(\Delta))=AC$

$d(A,(\Delta))=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}$

$=\sqrt{2}$

PROF SAÏD

Exercice 2 :

$a=-1-i\sqrt{3}$, $b=-1+i\sqrt{3}$ *et t la translation de Vecteur* $\overrightarrow{OA}$

1) *On a* : $t_{\overrightarrow{OA}}(B)=D$ *donc* $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OA}$

$$\Leftrightarrow d-b=a-o$$
$$\Leftrightarrow d=a+b$$
$$\Leftrightarrow d=(-1-i\sqrt{3})+(-1+i\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow d=-2$$

Alors l'affixe de D l'image de B par la translation t est $d=-2$.

2) *On considere la rotation R de centre D et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$

On a : $R(B)=C \Leftrightarrow c-d=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times(b-d)$

$$\Leftrightarrow \quad c=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times(b-d)+d$$
$$\Leftrightarrow \quad c=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})\times(-1+i\sqrt{3}-(-2))-2$$
$$\Leftrightarrow \quad c=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(1+i\sqrt{3})-2$$
$$\Leftrightarrow \quad c=-\frac{1}{2}\cancel{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2}-2$$
$$\Leftrightarrow \quad c=\frac{-1-3-4}{2}=-4$$

Donc l'affixe de C l'image deB parla rotation R est C = - 4

3) *a*) *Ecrire* $\frac{b-c}{a-c}$ *sous forme trigonométrique.*

On a : $\frac{b-c}{a-c}=\frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

PROF SAÏD

$$=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}\times\frac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\ (conjugé)$$

$$=\frac{9+3i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{3^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

b) *On a :* $\frac{b-c}{a-c}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=e^{i\frac{2\pi}{3}}\ (1)$$

D'aprés la question 2) *, on a :* $R(B)=C$

Alors $c-d=e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-d)\Leftrightarrow\frac{c-d}{b-d}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (2)

Donc de (1) *et* (2) *on déduit que* $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2=\frac{c-d}{b-d}$

4) *Soient les deux cercles* $(\tau)(D,2)$ *et* $(\tau')(O,4)$ *et* $M(z)$ *un point* $\in(\tau)$ *et* (τ').

a) *On a:* $M(z)\in(\tau)$ *, avec* (τ) *un cercle de centre* D *et de rayon* 2

$$\Leftrightarrow DM=2$$

$$\Leftrightarrow |z-d|=2\ (\ d=-2\ ,d'\text{aprés la question }1)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{|z+2|=2}$$

b) On a : $M(z) \in (\tau')$, avec (τ') un cercle de centre O et de rayon 4.

donc $OM = 4 \Leftrightarrow |z| = 4$

Or $(\forall z \in \mathbb{C})$, $|z|^2 = z\bar{z} \Rightarrow z\bar{z} = 16$ (*)

on a : $|z+2| = 2 \Rightarrow |z+2|^2 = (z+2)\overline{(z+2)}$

$$\Rightarrow (z+2)\overline{(z+2)} = 2^2$$

$$\Rightarrow (z+2)(\bar{z}+2) = 4$$

$$\Rightarrow z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + \cancel{4} = \cancel{4}$$

$$\Rightarrow 16 + 2(z+\bar{z}) = 0$$

$$\Rightarrow 2(z+\bar{z}) = -16 \Rightarrow (z+\bar{z}) = -8$$

c) On sait que $M(z)$ est un point de (τ) et (τ') donc $\begin{cases} |z+2| = 2 \\ |z| = 4 \\ z+\bar{z} = -8 \end{cases}$

Soit $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réel.

Donc $z + \bar{z} = -8$

$\Rightarrow (x+iy) + (x-iy) = -8$

$\Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$

Alors $z = -4 + iy$, or $|z| = 4$

donc $\sqrt{(-4)^2 + y^2} = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{(-4)^2 + y^2}\right)^2 = 4^2$

$$\Rightarrow \cancel{16} + y^2 = \cancel{16} \Rightarrow y = 0$$

Ainsi, les deux cercles (τ) et (τ') se coupent en un point M d'affixe $z = -4$

PROF SAÏD

Exercice 3 :

Puisque on tire simultanément 3 boules de l'urne qui contient 10 boules :
(3 boules blanches − 3 boules Vertes − 4 boules rouges)

$$donc\ card(\Omega) = C_{10}^{3} = \frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3} = 120$$

1) *Soit A est l'évenement "N'obtenir aucune boule rouge"*

donc $A : \overline{R}, \overline{R}, \overline{R}$ *et le nombre des boules non rouge est 6.*

$$\Rightarrow card(A) = C_{6}^{3} = \frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3} = 20$$

$$D'où\ p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

2) *Soit B : "Obtenir 3 boules blnaches ou 3 boules Vertes"*

$$Card(B) = C_{3}^{3} + C_{3}^{3} = 1+1 = 2$$

$$Donc\ p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

3) *Soit C : "Obtenir exactement une boule rouge"*

$$Ainsi\ card(C) = C_{4}^{1}\times C_{6}^{2} = 4\times\frac{6\times 5}{1\times 2} = 60$$

$$Donc\ p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

4) *Soit D : "Obtenir au moins 2 boules rouges"*

$$Ainsi\ ,\ card(D) = C_{4}^{2}\times C_{6}^{1} + C_{4}^{3}$$
$$= 6\times 6 + 4 = 40$$

$$Donc\ p(D) = \frac{card(D)}{card(\Omega)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

Exercice 4:

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ,\ h(x) = (x+1)e^{x}$

1) a) *On a :* $x \to xe^{x}$ *est une primitive de h sur* $\mathbb{R}$.

et $(\forall x \in \mathbb{R})\ ,\qquad (xe^{x})' = (x)'e^{x} + x\times(e^{x})'$

$$=1\times e^x + x\times e^x$$
$$=(1+x)e^x=(x+1)e^x=h(x)$$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})$, $h(x)=\left(xe^x\right)'$, *d'où* $x\to xe^x$ *est une primitive de h sur* $\mathbb{R}$.

Calculons $I=\int_{-1}^{0}h(x)\,dx$?

On a : $I=\int_{-1}^{0}h(x)\,dx=\left[xe^x\right]_{-1}^{0}$
$$=0e^0-(-1)e^{-1}$$
$$=0+1e^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

b) *On a* : $J=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^x\,dx$

On pose : $U(x)=(x+1)^2 \Leftrightarrow U'(x)=2(x+1)$

et $V'(x)=e^x \Leftrightarrow V(x)=e^x$

Donc $J=\left[(x+1)^2e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2(x+1)e^x\,dx$
$$=\left((0+1)^2e^0-(-1+1)^2e^{-1}\right)-2\int_{-1}^{0}(x+1)e^x\,dx$$
$$=1-0^2\times e^{-1}-2\int_{-1}^{0}h(x)\,dx$$
$$=1-2\times\frac{1}{e}=1-\frac{2}{e}$$

2) a) *Résoudre l'équation differentielle* $(E): y''-2y'+y=0$

l'équation caractéristique de (E) *est* : $r^2-2r+1=0$
$$\Rightarrow (r-1)^2=0$$
$$\Rightarrow r-1=0 \quad\Rightarrow r=1$$

Donc l'équation a une seule solution $r=1$, *alors les solutions l'équation differentielle* (E) *sont les fonctions y définies sur* $\mathbb{R}$ *par* :

$y(x)=(\alpha x+\beta)e^x$, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

PROF SAÏD

$b)$ *Montrons que h est la solution de* (E) *, verifie* $h(0)=1$ *et* $h'(0)=2$

Soit la fonction g une solution de (E) / $g(0)=1$ *et* $g'(0)=2$

ainsi , $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=(\alpha x+\beta)e^{x}$ *avec* α *et* β *des réels.*

or $g(0)=1 \Rightarrow (\alpha 0+\beta)e^{0}=1 \Rightarrow \beta=1$

et comme, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=(\alpha x+\beta)'e^{x}+(\alpha x+\beta)(e^{x})'$

$$=\alpha e^{x}+(\alpha x+\beta)e^{x}$$

donc $g'(x)=\alpha e^{0}+(\alpha 0+\beta)e^{0}=\alpha+\beta=\alpha+1$

On sait que: $g'(0)=2$ *donc* $\alpha+1=2 \Rightarrow \alpha=1$

D'où $(\forall x\in\mathbb{R})$, $g(x)=(x+1)e^{x}=h(x)$

Ainsi , h est la solution de (E) *qui vérifie* $h(0)=1$ *et* $h'(0)=2$

PROF SAÏD

Probléme :

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x(e^{\frac{x}{2}}-1)^{2}$

1)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{x}{2}}-1)^{2}$

$$=+\infty\ \left(\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}=+\infty\ donc \lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{x}{2}}-1)^{2}=+\infty\right)$$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{\frac{x}{2}}-1)^{2}$

$$=-\infty\ \left(\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2}}=0\ donc \lim_{x\to-\infty}(e^{\frac{x}{2}}-1)^{2}=1\right)$$

2) *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}(e^{\frac{x}{2}}-1)^{2}}{\cancel{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{x}{2}}-1)^{2}=+\infty\left(car \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}=+\infty\right)$$

donc la courbe (C) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branhce parabolique de direction l'axe des ordonnées* (oy).

3) a) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 - x$

$$= \lim_{x\to-\infty} x((e^{\frac{x}{2}})^2 - 2\times e^{\frac{x}{2}} \times 1 + 1^2) - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x(e^x - 2\times e^{\frac{x}{2}} + 1) - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} xe^x - 2xe^{\frac{x}{2}} + \cancel{x} - \cancel{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} xe^x - \frac{4x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \quad \text{"car } \lim_{t\to-\infty} te^t = 0\text{"}$$

Donc $(\Delta): y = x$ est une asymptote de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Le signe de $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = xe^x - 2xe^{\frac{x}{2}}$ " d'aprés la question 3)a)"

$$= x\times e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} - 2xe^{\frac{x}{2}} \quad \text{" car } e^x = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}}\text{"}$$

$$= xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 2)$$

Ainsi, le signe de $(f(x)-x)$ est celui de $x(e^{\frac{x}{2}}-2)$.

$e^{\frac{x}{2}} - 2 \geq 0$ et $e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{x}{2}} = 2$

$\Leftrightarrow \ln e^{\frac{x}{2}} \geq \ln 2 \quad \Rightarrow \ln e^{\frac{x}{2}} = \ln 2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} \geq \ln 2$

$\Leftrightarrow x \geq 2\ln 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2\ln 2$

$\Leftrightarrow x \geq \ln 4 \quad \Rightarrow x = \ln 4$ et on peut deduire : $e^{\frac{x}{2}} - 2 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq \ln 4$

x	$-\infty$ 0	ln4	$+\infty$
$e^{\frac{x}{2}}+2$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
$x(e^{\frac{x}{2}}+2)$	$+$	$-$	$+$

$Ainsi, \forall x \in [0, \ln 4] : f(x) - x \leq 0$ *

$et \forall x \in]-\infty, 0] \cup [\ln 4, +\infty[\ : f(x) - x \geq 0$ **

Donc ,on peut deduire que :

*De * la courbe* (C) *est en dessous de* (Δ) *sur* $[0, \ln 4]$

*De ** la courbe* (C) *est en dessus de* (Δ) *sur* $]-\infty, 0] \cup [\ln 4, +\infty[$.

4)*a*) *Les fonctions* $x \to x$ *et* $x \to (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$.
alors f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = (x)'(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + x((e^{\frac{x}{2}} - 1)^2)'$$

$$= (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + x \times 2 \times (e^{\frac{x}{2}} - 1)'(e^{\frac{x}{2}} - 1) \quad "(V^2)' = 2V' \times V"$$

$$= (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + x \times 2 \times (\frac{x}{2})' e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} - 1) \quad "(e^v)' = V' \times e^v"$$

$$= (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + x \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} - 1)$$

$$= \mathbf{(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)}$$

b) $e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0 \quad et \quad e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \geq 1 \qquad \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} \geq 1$

$\Leftrightarrow \ln e^{\frac{x}{2}} \geq \ln(1) \ \Rightarrow \ln e^{\frac{x}{2}} \leq \ln(1)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq \ln(1) \quad \Rightarrow \frac{x}{2} \leq \ln(1)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq 0 \ \Rightarrow \frac{x}{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0 \quad \Rightarrow x \leq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		-		+	
$(e^{\frac{x}{2}} - 1)$		-		+	
$x(e^{\frac{x}{2}} - 1)$		+		+	

PROF SAÏD

Donc $\forall x \in R,\ x(e^{\frac{x}{2}}-1) \geq 0 \quad (*)$

$On\ a : \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + e^{\frac{x}{2}} \times x(e^{\frac{x}{2}}-1)$

$et\ puisque\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 \geq 0\ \ et\ \ x(e^{\frac{x}{2}}-1) \geq 0\ \ (d'apés\,(*))$

$Donc\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5)a) $Monter\ que\ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)\ /\ g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$

$On\ a : \ f'\ est\ dérivable\ sur\ \ \mathbb{R} :$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \left((e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1) \right)'$$

$$= 2(e^{\frac{x}{2}}-1)'(e^{\frac{x}{2}}-1) + (xe^{\frac{x}{2}})'(e^{\frac{x}{2}}-1) + xe^{\frac{x}{2}} \times (e^{\frac{x}{2}}-1)'$$

$$= 2(\frac{x}{2})'e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1) + ((x)'e^{\frac{x}{2}} + x(e^{\frac{x}{2}})')(e^{\frac{x}{2}}-1) + xe^{\frac{x}{2}} \times (\frac{x}{2})'e^{\frac{x}{2}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1) + (e^{\frac{x}{2}} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}}-1) + xe^{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1) + (2 \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}}-1) + xe^{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left[2(e^{\frac{x}{2}}-1) + (2+x)(e^{\frac{x}{2}}-1) + xe^{\frac{x}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left[2e^{\frac{x}{2}} - 2 + 2e^{\frac{x}{2}} - 2 + xe^{\frac{x}{2}} - x + xe^{\frac{x}{2}} \right]$$

PROF SAÏD

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left[2xe^{\frac{x}{2}}+4e^{\frac{x}{2}}-x-4\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left[(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\times g(x)$$

b) D'aprés la courbe (Cg), on remarque que :

D'une part ,(Cg) est dessous de l'axe (Ox) sur $[\alpha,0]$

alors $\forall x\in[\alpha,0],\ g(x)\leq 0$

D'autre part ,(Cg) est dessus de l'axe (Ox) sur $]-\infty,\alpha]$ et $[0,+\infty[$

alors $\forall x\in]-\infty,\alpha]\cup[0,+\infty[,\ g(x)\geq 0$

PROF SAÏD

c) Puisque $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ *donc le signe de f'' depend de g.*

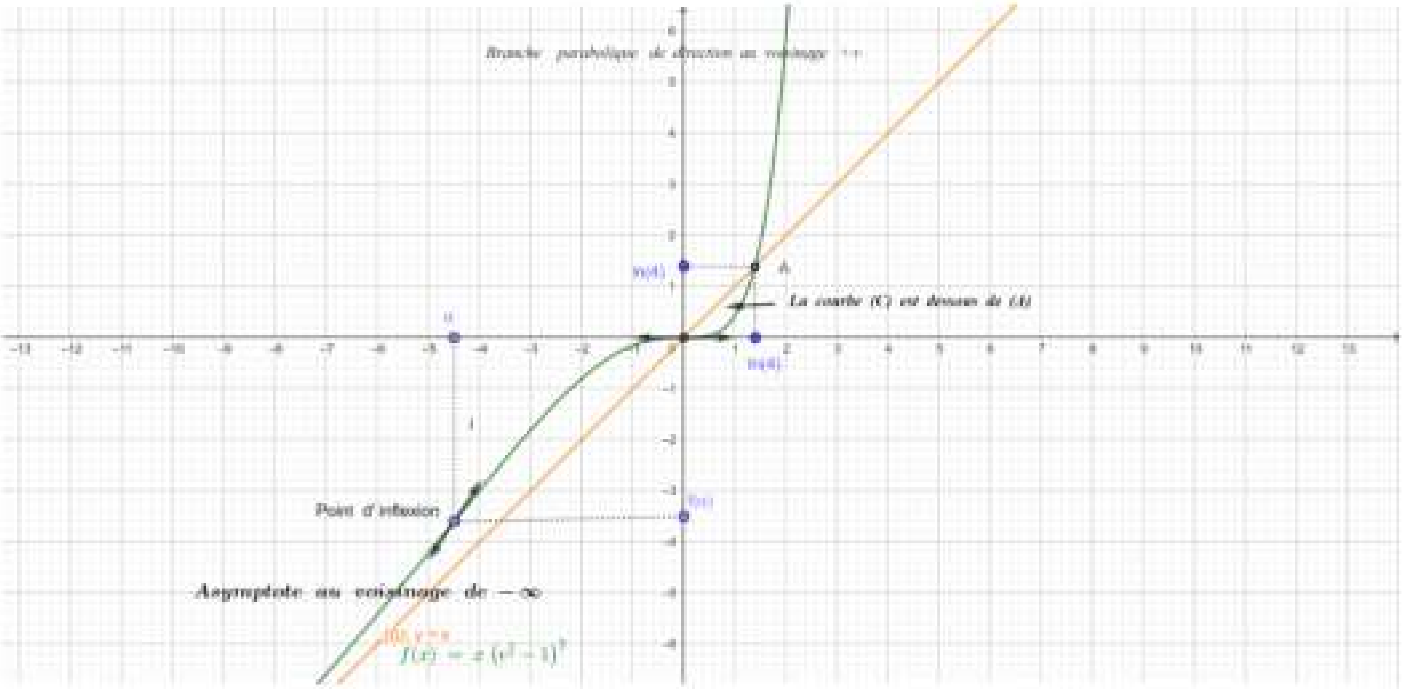
x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		+		-		+	
Concavité de la courbe		$\cup$	$A(\alpha,f(\alpha))$	$\cap$	$B(0,f(0))$	$\cup$	

Les abscisses des points d'inflexions : O et α

On constate que f'' s'annule en changeant de signe en O et α ,

Donc **$A(\alpha,f(\alpha))$** *et* **$B(O,f(o))$** *sont les points d'inflexions de la courbe (C).*

6) *Construire La courbe* (C) *avec* $\ln(4)=1,4\,;\alpha=-4,5$ *et* $f(\alpha)=-3,5$



7)*a*) *Montrons que* f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* $\mathbb{R}$.

On sait que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *, alors elle est continue sur* $\mathbb{R}$*, et comme* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *(Voir question* 4)), *alors elle est continue et strictement monotone , Ceci dit, elle admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur*

$$\begin{aligned} J &= f(\mathbb{R}) \\ &= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[\\ &=]-\infty,+\infty[\;=\mathbb{R} \end{aligned}$$

b) *Calulons* $f^{-1}(\ln 4)$

On remarque que $f(\ln 4)=\ln 4 \Rightarrow f^{-1}(\ln 4)=\ln 4$

donc $(f^{-1})'(\ln 4)=\dfrac{1}{f'((f^{-1})'(\ln 4))}=\dfrac{1}{f'(\ln 4)}$

$$\begin{aligned} or\quad f'(\ln 4) &= (e^{\frac{\ln 4}{2}}-1)^2+\ln 4\times e^{\frac{\ln 4}{2}}(e^{\frac{\ln 4}{2}}-1) \\ &= (2-1)^2+\ln 4\times 2\times(2-1)=1+2\ln 4 \end{aligned}$$

Ainsi $(f^{-1})'(\ln 4)=\dfrac{1}{1+2\ln 4}$

8) *Soit* $U_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

a) *Montrons par recurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \prec U_n \prec \ln 4$

***Initialisation :**

Pour $n = 0$ *, on a* : $U_0 = 1$ *et* $0 \prec 1 \prec \ln 4 \Rightarrow 0 \prec U_0 \prec \ln 4$

***Héridité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, *supposons que* $0 \prec U_n \prec \ln 4$

On montre que $0 \prec U_{n+1} \prec \ln 4$

On sait que f *est une fonction continue et coissante sur* $[0, \ln 4]$ (*Voir courbe* (C))

et $0 \prec U_n \prec \ln 4$ *, donc* $f(0) \prec f(U_n) \prec \ln 4$

$$\Rightarrow 0 \prec U_{n+1} \prec \ln 4 \quad (\text{car } U_{n+1} = f(U_n))$$

***Conclusion :**

Donc , d'aprés le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 \prec U_n \prec \ln 4$

b) *Montrons que la suite* (U_n) *est décroissante.*

Faisons suite á la question 3)a) , on a : $\forall x \in [0, \ln 4]$, $f(x) - x \leq 0$

et puisque $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0, \ln 4]$ (*voir reponse question precedente*)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(U_n) - U_n \leq 0$

$\Rightarrow \quad U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad (\text{car } f(U_n) = U_{n+1})$

Par conséquent , la suite (U_n) *est décroissante.*

c) *On sait que, la suite* (U_n) *est décroissante et minorée par* 0

(*car* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \prec U_n \prec \ln 4$). *Ceci dit , la suite* (U_n) *est convergente.*

d) *Calculons* $\lim U_n$?

On a :

$-U_{n+1} = f(U_n)$ $-$ f *est continue sur* $]0, \ln 4]$

$- f(]0, \ln 4]) =]0, \ln 4]$ $-$ $U_0 = 1$ *et* $1 \in]0, \ln 4]$

$-$ *la suite* (U_n) *est convergente.*

Alors $\lim U_n$ *est la solution de l'équation* $f(x) - x = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 4$$

Or la suite (U_n) *est décroissante et* $U_0 = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 1$

Par consequent , $\lim U_n = 0$